

Шәкір Айдос 

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

8-дәріс. Туындының көмегімен функцияны зерттеу

Дәрістің мақсаты – Туындының көмегімен функцияның таңба тұрақтылығын, өсу аралығын, кему аралығын, ең үлкен және ең кіші мәндерін табу

Негізгі сұрақтар:

1. Функцияның тұрақтылығы, өсуі және кемуі
2. Функцияның экстремумы
3. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері

1 Функцияның тұрақтылығы, өсуі және кемуі

Теорема 1.1. Егер $f(x)$ функциясы (a, b) интервалында дифференциалданып, кез келген $\xi \in (a, b)$ нүктесінде $f'(\xi) = 0$ болса, онда $f(x)$ функциясы (a, b) интервалында тұрақты.

Дәлелдеу. (a, b) интервалынан x_0 нүктесін аламыз, ал x осы интервалдың кез келген нүктесі болсын. Онда $[x_0, x] \subset (a, b)$ аралықта $f(x)$ функциясы дифференциалданады, демек, үзіліссіз болады. $f(x)$ функциясы $[x_0, x]$ кесіндісінде Лагранж теоремасының шарттарын қанағаттандырады, олай болса, осы кесіндіде жатқан ξ нүктесі табылып:

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0).$$

Теорема шарты бойынша $f'(\xi) = 0$ болғандықтан,

$$f(x) - f(x_0) = 0 \implies f(x) = f(x_0) - \text{тұрақты.}$$

□

Теорема 1.2. (a, b) интервалында дифференциалданатын функция осы интервалда өспелі (кемімелі) болуы үшін $\forall x \in (a, b)$ нүктесінде

$$f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0)$$

теңсіздігі орындалуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу.

Қажеттілігі. Өспелі функция үшін: $\forall x_0 \in (a, b)$,

$$x > x_0 \implies f(x) \geq f(x_0), \quad x < x_0 \implies f(x) \leq f(x_0).$$

Сонда $\forall x \neq x_0$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \implies f'(x_0) \geq 0.$$

Жеткіліктілігі. Егер $f'(x) \geq 0$, $x_1 < x_2$ үшін Лагранж теоремасын қолдансақ:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 < \xi < x_2.$$

$f'(\xi) \geq 0$ болғандықтан, $f(x_2) \geq f(x_1)$. Сол арқылы $f(x)$ өспелі. □

Теорема 1.3. Егер (a, b) интервалында дифференциалданатын $f(x)$ функциясы үшін $\forall x \in (a, b)$

$$f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0),$$

онда $f(x)$ функциясы (a, b) аралығында қатаң өспелі (қатаң кемімелі) болады.

Дәлелдеу. Қатаң өспелі функция үшін $x_1 < x_2$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 < \xi < x_2.$$

$f'(\xi) > 0$ болғандықтан $f(x_2) > f(x_1)$, демек $f(x)$ қатаң өспелі. □

Мысалдар

$y(x) = x^3 + 6x^2 + 12x - 13$ функциясының өсуін анықтау.

Туындысы:

$$y'(x) = 3x^2 + 12x + 12 = 3(x^2 + 4x + 4) = 3(x + 2)^2.$$

Кез келген $x \in (-\infty, +\infty)$ үшін $y'(x) \geq 0$, демек, функция өспелі.

$y(x) = 3x^4 - 8x^3 + 16$ функциясының өсу және кему аралықтары.

Туындысы:

$$y'(x) = 12x^3 - 24x^2 = 12x^2(x - 2).$$

Егер $x > 2$, $y'(x) > 0$ – функция өспелі, ал $x < 2$, $y'(x) < 0$ – функция кемімелі. Сондықтан, $(-\infty, 2)$ аралығында функция кемімелі, ал $(2, +\infty)$ аралығында функция өспелі.

2 Функцияның экстремумы

$f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің δ аймағында $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ анықталған және үзіліссіз болсын.

Анықтама 2.1. Егер

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)) \quad (2.1)$$

теңсіздігі орындалса, онда $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде локалдық максимум (минимум) бар деп атайды. Локалдық максимум мен минимумды біріктіріп, локалдық экстремум деп атаймыз, ал x_0 нүктесін максимум (минимум) нүктесі деп атаймыз.

Теорема 2.1 (Экстремумның қажетті шарты). Егер $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде локалдық экстремумы бар және осы нүктеде дифференциалданатын болса, онда

$$f'(x_0) = 0.$$

Дәлелдеу. x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясының экстремумы бар болғандықтан, осы нүктенің $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ аймағында функцияның ең үлкен немесе ең кіші мәні бар. Ферма теоремасы бойынша

$$f'(x_0) = 0.$$

□

Стационар және кризистік нүктелер. Функция туындысының нөлге тең болатын нүктелерін стационар нүкте, ал функция үзіліссіз және оның туындысы нөлге тең немесе туындысы болмаған нүктелерін кризистік (сын) нүктелері деп атайды. Функцияның экстремум нүктелері оның кризистік нүктелерінде жатады. Туындының нөлге тең болуы немесе болмауы экстремумның қажетті шарты болып табылады, бірақ жеткілікті шарты болмайды.

$f(x) = x^3$ функциясын қарастырайық. Туындысы $f'(x) = 3x^2$, $x = 0$ нүктесінде $f'(0) = 0$, алайда бұл нүктеде экстремум жоқ, себебі функция анықталу облысында өспелі.

Теорема 2.2 (Экстремумның жеткілікті шарты). $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің қайсыбір аймағында (немесе нүктені қоса алмай) дифференциалданады және x_0 стационар нүкте үзіліссіз болсын.

1. Егер $f'(x)$ функциясы x_0 нүктесінде таңбасын плюстен минуске өзгертсе:

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) > 0, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) < 0,$$

онда x_0 нүктесінде функцияның максимум нүктесі болады.

2. Егер $f'(x)$ функциясы x_0 нүктесінде таңбасын минус пен плюске өзгертсе:

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) < 0, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) > 0,$$

онда x_0 нүктесінде функцияның минимум нүктесі болады.

3. Егер $f'(x)$ туынды таңбасы x_0 нүктесінде өзгермесе, онда бұл нүктеде экстремум жоқ.

Дәлелдеу. Бірінші жағдайды қарастырайық. $(x_0 - \delta, x_0)$ аралығында кез келген x нүктесін алайық, $[x, x_0]$ кесіндісінде Лагранж теоремасы бойынша

$$f(x_0) - f(x) = f'(\xi)(x_0 - x), \quad x_0 - \delta < x < \xi < x_0.$$

$f'(\xi) > 0$ және $x_0 - x > 0$, сондықтан

$$f(x_0) - f(x) > 0 \implies f(x_0) > f(x).$$

Сол сияқты $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ үшін $f'(x) < 0$:

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) < 0 \implies f(x) < f(x_0).$$

Сондықтан x_0 нүктесінде максимумы бар екені анықталады. Екінші және үшінші жағдайлар дәл осылай дәлелденеді. □

Теорема 2.3 (Экстремумның екінші жеткілікті шарты). x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының стационар нүктесі болсын:

$$f'(x_0) = 0$$

және $f''(x_0)$ туындысы бар. Онда:

1. Егер $f''(x_0) > 0$, онда x_0 минимум нүктесі;
2. Егер $f''(x_0) < 0$, онда x_0 максимум нүктесі.

Дәлелдеу. Егер $f''(x_0) > 0$, онда $f'(x)$ функциясы x_0 нүктесінде өспелі, демек, $\delta > 0$ үшін:

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) < 0, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) > 0.$$

Бұл 5.2.2 теорема бойынша x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясының минимумы бар. Максимум жағдайы дәл осылай дәлелденеді. □

3 Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері

Егер $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда Вейерштрасс теоремасы бойынша осы аралықта өзінің ең үлкен және ең кіші мәнін қабылдайды. Егер ең үлкен (ең кіші) мән берілген кесіндінің ішкі нүктелерінде қабылданса, онда ол мән максимум немесе минимумның біреуі болады. Алайда ең үлкен (ең кіші) мәндер $[a, b]$ кесіндісінің шеткі нүктелерінде қабылдануы да мүмкін. Сондықтан $f(x)$ функциясының $[a, b]$ кесіндісіндегі ең үлкен (ең кіші) мәнін табу үшін $f(x)$ функциясының стационар нүктелеріндегі мәндерін тауып, оларды $f(a)$ мен $f(b)$ мәндерімен салыстыру керек. Осы сандардың ең үлкен (ең кіші) мәні $f(x)$ функциясының $[a, b]$ кесіндісіндегі ең үлкен (ең кіші) мәні болады.

$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ функциясының $[-2, 2]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәнін табайық.

Шешу. Алдымен стационар нүктелерін анықтаймыз:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x + 1)(x - 1).$$

Стационар нүктелер: $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Функция мәндері:

$$f(-1) = f(1) = 0, \quad f(0) = 1.$$

Кесіндінің шеткі нүктелерін қарастырамыз:

$$f(-2) = f(2) = 9.$$

Сондықтан функцияның ең үлкен мәні: 9, ең кіші мәні: 0.

$f(x) = 2 \operatorname{arctg}(2x - x^2) + \frac{\pi}{4}$ функциясының $[0, 3]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәнін табайық.

Шешу. Стационар нүктесін табамыз:

$$f'(x) = 2 \frac{1}{1 + (2x - x^2)^2} (2 - 2x) = \frac{4(1 - x)}{1 + (2x - x^2)^2}.$$

Сондықтан $1 - x = 0 \implies x_0 = 1$. Функция мәні:

$$f(1) = 2 \operatorname{arctg} 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Кесіндінің ұштарындағы мәндер:

$$f(0) = \frac{\pi}{4}, \quad f(3) = 2 \operatorname{arctg}(-3) + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 2 \operatorname{arctg} 3.$$

Сондықтан функцияның ең үлкен мәні: $\frac{3\pi}{4}$, ең кіші мәні: $\frac{\pi}{4} - 2 \operatorname{arctg} 3$.

Ауданы S болатын тіктөртбұрыштардың периметрі ең кіші болатын төртбұрышты табу керек.

Шешу. Төртбұрыштың бір қабырғасы x , онда екінші қабырғасы $\frac{S}{x}$. Периметр $p(x)$:

$$p(x) = 2x + 2\frac{S}{x}, \quad x > 0.$$

Туындысын табамыз:

$$p'(x) = 2 - \frac{2S}{x^2} = \frac{2(x^2 - S)}{x^2}.$$

$p'(x) = 0 \implies x^2 - S = 0 \implies x = \sqrt{S}$. Солайша екінші қабырғасы да $\frac{S}{\sqrt{S}} = \sqrt{S}$ болады. Периметр:

$$p = 2\sqrt{S} + 2\sqrt{S} = 4\sqrt{S}.$$

Демек, ауданы S -ке тең болатын төртбұрыштардың периметрі ең кіші болатын төртбұрыш — квадрат.

4 Қосымша ақпарат

Студент толық ақпаратты [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14] жұмыстардан қарауға болады.

Список литературы

- [1] Ибрашев Х.И., Еркеғұлов Ш.Т. Математикалық анализ курсы. – Алматы: Экономика, 2014. – 1-том. – 562 б. 4
- [2] Жәутіков О.А. Математикалық анализ курсы. – Алматы: Экономика, 2014. – 832 б. 4
- [3] Темірғалиев Н.Т. Математикалық анализ. – Алматы: Мектеп, 1987. – 1-том. – 288 б. 4
- [4] Темірғалиев Н.Т. Математикалық анализ. – Алматы: Ана тілі, 1991. – 2-том. – 400 б. 4
- [5] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. – М.: Наука-Физматлит, 1998. – Часть 1. – 616 с. 4
- [6] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. – М.: Наука-Физматлит, 1998. – Часть 2. – 448 с. 4
- [7] Зорич В.А. Математический анализ. – М.: МЦНМО, 2012. – Т. 1. – 702 с. 4

- [8] Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. – М.: Высшая школа, 1981. – Том 1. – 687 с. 4
- [9] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматлит, 2003. – Том 1. – 680 с. 4
- [10] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматлит, 2003. – Том 2. – 802 с. 4
- [11] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 624 с. 4
- [12] Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – СПб.: Профессия, 2001. – 432 с. 4
- [13] Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. – М.: Физматлит, 2005. – Том 1. – 400 с. 4
- [14] Сатыгулова С., Исакова А.Қ., Айтжанов С.Е. Математикалық анализ I. – Алматы: Қазақ университеті, 2020. -236 б. 4